

8. 考查求参数范围

例 8. (2017 年高考天津卷理 8) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 3, & x \leq 1 \\ x + \frac{2}{x}, & x > 1 \end{cases}$

设 $a \in \mathbb{R}$, 若关于 x 的不等式 $f(x) \geq \frac{x}{2} + a$ 在 $\mathbb{R}$ 上恒成立, 则 a 的取值范围是 ()

- A. $[-\frac{47}{16}, 2]$ B. $[-\frac{47}{16}, \frac{39}{16}]$
C. $[-2\sqrt{3}, 2]$ D. $[-2\sqrt{3}, \frac{39}{16}]$

解析: $f(x) \geq \frac{x}{2} + a$ 等价于 $-f(x) \leq \frac{x}{2} + a \leq f(x)$.

当 $x \leq 1$ 时, 就是 $-x^2 + x - 3 \leq \frac{x}{2} + a \leq x^2 - x + 3$, 即 $-x^2 + \frac{1}{2}x - 3 \leq a \leq x^2 - \frac{3}{2}x + 3 - (x - \frac{1}{4})^2 - \frac{47}{16} \leq a \leq (x - \frac{3}{4})^2 + \frac{39}{16}$, 所以 $-\frac{47}{16} \leq a \leq \frac{39}{16}$.

当 $x > 1$ 时, 就是 $-x - \frac{2}{x} \leq \frac{x}{2} + a \leq x + \frac{2}{x}$, 即 $-\frac{3}{2}x - \frac{2}{x} \leq a \leq \frac{1}{2}x + \frac{2}{x}$.

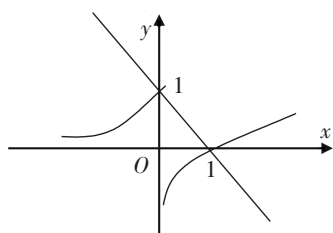
而 $-\frac{3}{2}x - \frac{2}{x} \leq -2\sqrt{3}$, 当且仅当 $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$ 时取等号. $\frac{1}{2}x + \frac{2}{x} \geq 2$, 当且仅当 $x = 2$ 时取等号. 所以 $-2\sqrt{3} \leq a \leq 2$. 综上可知 $-\frac{47}{16} \leq a \leq 2$, 选答案 A.

点评: 本题主要考查分段函数的意义、二次函数与双勾函数的最值、恒成立不等式、参变分离思想等. 要注意分段讨论后得到的 a 的范围应取交集. 能否将恒成立不等式 $f(x) \geq \frac{x}{2} + a$ 等价变形是解题的关键. 一般地, $|f(x)| \leq g(x) \Leftrightarrow -g(x) \leq f(x) \leq g(x)$; $|f(x)| \geq g(x) \Leftrightarrow f(x) \leq -g(x)$ 或 $f(x) \geq g(x)$.

训练 8: (2018 年高考课标 I 卷理 9) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 0 \\ \ln x, & x > 0 \end{cases}$ $g(x) = f(x) + x + a$, 若 $g(x)$ 存在两个零点, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $[-1, 0)$ B. $[0, +\infty)$ C. $[-1, +\infty)$ D. $[1, +\infty)$

解析: “ $g(x) = f(x) + x + a$ 存在两个零点” 就是 “曲线 $y = f(x)$ 与直线 $y = -x - a$ 有两个交点”. 函数 $f(x)$ 的图像如右: 要使得动直线 $y = -x - a$ 与 $f(x)$ 的图像有两个交点, 必须且只须 $-a \leq 1$, 即 $a \leq -1$. 故选 C.



9. 考查面积范围问题

例 9. 设直线 l_1, l_2 分别

是函数 $f(x) = \begin{cases} -\ln x, & 0 < x < 1 \\ \ln x, & x > 1 \end{cases}$ 图像上点 P_1, P_2 处的切线, l_1 与 l_2 垂直相交于点 P , 且 l_1, l_2 分别与 y 轴相交于点 A, B , 则 $\triangle PAB$ 的面积取值范围是 ()

- A. $(0, 1)$ B. $(0, 2)$ C. $(0, +\infty)$ D. $(1, +\infty)$

解析: 设 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$, 由题意, 不妨设 $0 < x_1 < 1 < x_2$.

因为 $f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x}, & 0 < x < 1 \\ \frac{1}{x}, & x > 1 \end{cases}$ 所以 l_1 的斜率 $k_1 = -\frac{1}{x_1}$, l_2 的斜率

$$k_2 = \frac{1}{x_2}.$$

又 l_1 与 l_2 垂直, 所以 $k_1 \cdot k_2 = -1$, 即 $-\frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} = -1$, $x_1 x_2 = 1$.

写出切线 l_1 与 l_2 的方程分别为, $l_1: y = -\frac{1}{x_1}(x - x_1) - \ln x_1, \dots \dots \textcircled{1}$

$$l_2: y = \frac{1}{x_2}(x - x_2) - \ln x_2, \dots \dots \textcircled{2}$$

联立 $\textcircled{1}\textcircled{2}$ 解得交点 P 的横坐标 $x = \frac{2 - \ln(x_1 x_2)}{x_1 + x_2} = \frac{2}{x_1 + x_2}$.

由 $\textcircled{1}$ 得点 A 的坐标为 $(0, 1 - \ln x_1)$, 由 $\textcircled{2}$ 得点 B 的坐标为 $(0, -1 + \ln x_2)$.

于是 $|AB| = 2 - \ln x_1 - \ln x_2 = 2$.

故 $S_{\triangle PAB} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot \frac{2}{x_1 + x_2} = \frac{2}{x_1 + x_2} \leq \frac{2}{2\sqrt{x_1 \cdot x_2}} = 1$, 当且仅当 $x_1 = x_2 = 1$ 时等号成立, 与 $0 < x_1 < 1 < x_2$ 矛盾, 所以 $S_{\triangle PAB} < 1$. 正确答案是 A.

点评: 本题主要考查导数的几何意义、曲线的切线方程、解方程组、基本不等式, 以及分析、推理、运算能力和数形结合思想, 具有结构新颖、运算量大、交汇性强的特点, 能有效考查学生的思维水平和综合能力, 有较大的难度.

训练 9. (2018 年海口市模考卷文 10) 设直线 l_1, l_2 分别是函数 $f(x) = \begin{cases} e^{-x} - 1, & -2 < x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x < 2 \end{cases}$ 图像上点 $P_1(-1, m)$ 和 $P_2(1, n)$ 处的切线, l_1 与 l_2 相交于点 P , 且 l_1, l_2 分别与 x 轴相交于点 A, B , 则 $\triangle PAB$ 的面积是 _____.

解析: 因为点 $P_1(-1, m)$ 和点 $P_2(1, n)$ 在函数 $f(x)$ 的图像上, 所以 $m = e - 1, n = 1$. 在 $P_1(-1, e - 1)$ 处的切线 l_1 的方程是 $y - e + 1 = -e(x + 1)$, 即 $y = -ex - 1$. 在 $P_2(1, 1)$ 处的切线 l_2 的方程是 $y - 1 = 2(x - 1)$, 即 $y = 2x - 1$. l_1 与 l_2 相交于点 P 为 $(0, -1), A(-\frac{1}{e}, -1), B(\frac{1}{2}, 0)$.

于是 $\triangle PAB$ 的面积是 $\frac{1}{2} \times (\frac{1}{2} + \frac{1}{e}) \times 1 = \frac{e+2}{4e}$.

10. 考查实际问题

例 10. (2018 年高考上海卷 19) 某群体的人均通勤时间, 是指单日内该群体中成员从居住地到工作地的平均用时. 某地上班族 S 中的成员仅以自驾或公交方式通勤. 分析显示: 当 S 中 $x\%$ ($0 < x < 100$) 的成员自驾时, 自驾群体的人均通勤时间为